

生層序単元を表す座標図上のグラフ

山口 久美子*・塩野 清治**

Graph on Coordinates Diagram for Expressing Biostratigraphic Unites

Kumiko YAMAGUCHI* and Kiyoji SHIONO**

* 5-3-5 Midorigaoka, Heguri Ikoma-gun Nara 636-0941, Japan. E-mail: qys05253@nifty.ne.jp

**大阪市立大学名誉教授 Professor Emeritus of Osaka City University, 5-10, Daido-cho Ibaraki-shi, Osaka 567-0844, Japan.

キーワード：化石種，生層序学，生層準，半开区間，論理地質学

Key words: Fossil Species, Biostratigraphy, Biohorizon, Semi-open Interval, Geology-Oriented Logical System

1. はじめに

地質情報の有効なアルゴリズムを考案するためには、地質学の概念を数学表現する必要がある。山口・塩野 (2022) は種の生存期間を 2 次元の座標図に表示して、生層序区分する種をいつでも選択できることを明らかにした。本研究はその続きで、生層序単元を導き出して 2 次元の座標図に表示してみる。

2. 生層序単元

2.1 タクソンの生存期間

時間軸はある時刻を原点 0 として、過去から未来に向かう方向を正とする。時刻を実数とする。生物の個体 x はある時刻 p に誕生して、生存し、ある時刻 q に死ぬものと仮定する。個体 x は、 q になるギリギリまで生存して、 q には生存しないとして、個体 x が生存する時刻の集合は、 p 以上 q 未満のすべての実数の集合で

$$[p, q) = \{t \mid p \leq t < q\} \text{ (ただし, } p < q)$$

と仮定する。 $[p, q)$ は半开区間である。個体が生存する時刻の集合を個体の生存期間とよぶ。

生物は上位から界，門，綱，目，科，属，種というタクソン (taxon: 生物の分類単位。複数形はタクサ taxa。) に分類される。タクソン Σ の生存期間 T を、 Σ のすべての個体の生存期間の和集合と定義する。個体の生存期間が半开区間であるから、タクソン Σ の生存期間 T は半开区間の和集合である。ここで、 T は半开区間であると仮定する。いま、 T は

$$T = [t_{\min}, t_{\max})$$

と仮定する。これは、タクソン Σ はある時刻 t_{\min} に出現して、生存し、ある時刻 t_{\max} に絶滅したと仮定することである。

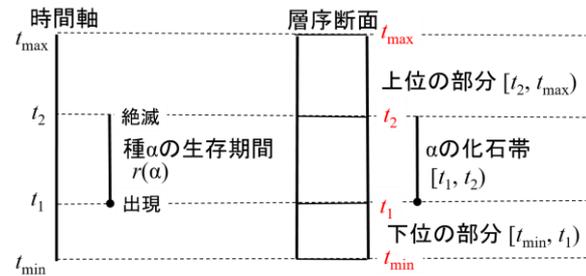
2.2 生層序区分の基本

Σ は綱，目，科ぐらいのタクソンであるとする。 Σ をいくつかの種に分類する。種もタクソンである。種の生存期間も、同様に、種のすべての個体の生存期間の和集合と定義して、半开区間であると仮定する。

生層序区分の基本(八尾, 2004)を次のように記述する。

第 1 図のように、種 α がある時刻 t_1 に出現して、生存して、ある時刻 t_2 に絶滅したと仮定する。種 α の生存期間を $r(\alpha)$ と書くと、 $r(\alpha) = [t_1, t_2)$ であると仮定する。いま、時間軸上の $T = [t_{\min}, t_{\max})$ と 1 対 1 対応する層序断面があるとすると、層序断面は α の化石を含む区間 $[t_1, t_2)$ と、それよりも下位の部分 $[t_{\min}, t_1)$ と上位の部分 $[t_2, t_{\max})$ に分割される。

層序断面中の化石を含む区間を化石帯とよぶ。



第 1 図 生層序区分の基本。

時間軸上の種の生存期間と層序断面中の化石帯の関係。

2.3 種の選択

種 α と種 β の前後関係 $\alpha \leq \beta$ を、生存期間の前後関係 \leq^* で次のように定義する。

$$r(\alpha) = [t_1, t_2), r(\beta) = [t_3, t_4) \text{ として,}$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow r(\alpha) \leq^* r(\beta) \Leftrightarrow t_1 \leq t_3, \text{ かつ, } t_2 \leq t_4$$

すべての種の集合から次の 2 つの条件を満たす種の集合 S を選択して生層序区分する。

- 条件 1: (S, \leq) は全順序集合である
- 条件 2: T のどの時刻においても S の種が 1 つ以上生存する。

2.4 生層序単元

条件 1 より、 (S, \leq) 上の区間 $[\alpha, \beta]$ を

$$[\alpha, \beta] = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta, x \in S\}$$

と定義する。 T の時刻 t に生存する種の集合 $\sigma(t)$ は

$$\sigma(t) = \{\alpha \mid t \in r(\alpha), \alpha \in S\}$$

である。種の生存期間は半開区間であるという仮定と、条件 1 より、 $\sigma(t)$ は (S, \leq) 上の区間である。

(S, \leq) を $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ とすると、 $\sigma(t)$ は

$$\sigma(t) = [\alpha_i, \alpha_j] \quad (\text{ただし, } i \leq j)$$

である。 $\sigma(t)$ の化石帯は、 $\alpha_k \in \sigma(t)$ ($i \leq k \leq j$)の化石帯 $r(\alpha_k) = [t_{k1}, t_{k2}]$ と、 α_i よりも古い種 α_l ($1 \leq l < i$)の化石帯より上位の部分 $[t_{l2}, t_{\max})$ と、 α_j よりも新しい種 α_m ($j < m \leq n$)の化石帯より下位の部分 $[t_{\min}, t_{m1})$ の共通集合である。 $\sigma(t) = [\alpha_i, \alpha_j]$ のとき、

$$\begin{aligned} \sigma(t) \text{の化石帯} &= (\cap_{i \leq k \leq j} [t_{k1}, t_{k2})) \cap (\cap_{1 \leq l < i} [t_{l2}, t_{\max})) \\ &\quad \cap (\cap_{j < m \leq n} [t_{\min}, t_{m1})) \end{aligned}$$

さらに、生存期間の前後関係 \leq^* から、上位の部分の共通集合 $\cap_{1 \leq l < i} [t_{l2}, t_{\max})$ は、 α_i の直前 α_{i-1} の化石帯より上位の部分 $[t_{i-1,2}, t_{\max})$ であり、下位の部分の共通集合 $\cap_{j < m \leq n} [t_{\min}, t_{m1})$ は、 α_j の直後 α_{j+1} の化石帯より下位の部分 $[t_{\min}, t_{j+1,1})$ であるから、

$$\sigma(t) \text{の化石帯} = (\cap_{i \leq k \leq j} [t_{k1}, t_{k2})) \cap [t_{i-1,2}, t_{\max}) \cap [t_{\min}, t_{j+1,1})$$

したがって、 $\sigma(t)$ の化石帯は半開区間の共通集合で、明らかに空集合でないから半開区間である。 $\sigma(t)$ の化石帯は

$$\sigma(t) \text{の化石帯} = [t_1, t_2)$$

と書ける。 $\sigma(t)$ の化石帯(半開区間)を生層序単位とする。

2.5 化石種の順序

$\sigma(t) = [\alpha_i, \alpha_j]$ であるとき、 $[\alpha_i, \alpha_j]$ が t を含む生層序単元の化石種である。化石種は新しい種が出現したとき、または、古い種が絶滅したとき、化石種は $[\alpha_{i+k}, \alpha_{j+l}]$ に変わり、次の生層序単位になる。ここで、 k, l は、それぞれ、絶滅種の数、出現種の数である。この化石種の順序は、 $r(\alpha) \leq^* r(\beta)$ と同様に定義して、

$$[\alpha_i, \alpha_j] \leq^* [\alpha_{i+k}, \alpha_{j+l}]$$

である。 $(\sigma(T), \leq^*)$ は全順序集合である。

2.6 例

第 2 図(a)は $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ を選択して生層序区分した例である。生存期間は $r(\alpha_1) = [t_{\min}, t_2)$, $r(\alpha_2) = [t_1, t_3)$, $r(\alpha_3) = [t_2, t_5)$, $r(\alpha_4) = [t_4, t_5)$, $r(\alpha_5) = [t_4, t_{\max})$ である。化石種は $\sigma(t_{\min}) = [\alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_1]$, $\sigma(t_1) = [\alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2]$, $\sigma(t_2) = [\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = [\alpha_3, \alpha_5]$ などであり、 $(\sigma(T), \leq^*)$ の順序は

$$[\alpha_1, \alpha_1] \leq^* [\alpha_1, \alpha_2] \leq^* [\alpha_2, \alpha_3] \leq^* [\alpha_3, \alpha_3] \leq^* [\alpha_3, \alpha_5] \leq^* [\alpha_5, \alpha_5]$$

である。

$[\alpha_1, \alpha_1]$ の生層序単位は、

$$r(\alpha_1) \cap r(\alpha_2) \text{の 下位の部分} = [t_{\min}, t_2) \cap [t_{\min}, t_1) = [t_{\min}, t_1)$$

$[\alpha_1, \alpha_2]$ の生層序単位は、

$$\begin{aligned} r(\alpha_1) \cap r(\alpha_2) \cap r(\alpha_3) \text{の 下位の部分} \\ = [t_{\min}, t_2) \cap [t_1, t_3) \cap [t_{\min}, t_2) = [t_1, t_2) \end{aligned}$$

$[\alpha_2, \alpha_3]$ の生層序単位は

$$\begin{aligned} r(\alpha_2) \cap r(\alpha_3) \cap r(\alpha_1) \text{の 上位の部分} \cap r(\alpha_4) \text{の 下位の部分} \\ = [t_1, t_3) \cap [t_2, t_5) \cap [t_2, t_{\max}) \cap [t_{\min}, t_4) = [t_2, t_3) \end{aligned}$$

他の生層序単位も同様に半開区間である。

3. 生層序単元のグラフ

3.1 生層序単元のグラフ

通常、第 2 図(a)のように生層序単位は層序断面を区分した図で表す。本研究では、(b)のように $S \times S$ の座標図上に $(\sigma(T), \leq^*)$ の有向グラフを描いて生層序単位を表す。

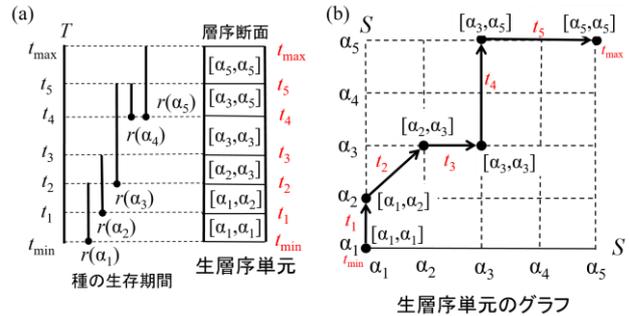
$S \times S$ の座標図の原点は (α_1, α_1) とする。縦軸、横軸、共に、 \leq の方向が正の方向であり、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の順に座標が並べられる。隣り合う座標 α_i と α_{i+1} の長さを 1 目盛りとする。

$\sigma(t) = [\alpha_i, \alpha_j]$ を座標図の点 (α_i, α_j) で表す。 $(\sigma(T), \leq^*)$ を有向辺で表示する。 $[\alpha_i, \alpha_j]$ の生層序単位が $[t_1, t_2)$ であるとき、点 (α_i, α_j) に向かう辺に t_1 、点 (α_i, α_j) から出る辺に t_2 とラベル付けをし

て生層序単元のグラフを完成する。河西(2012)と同様に、グラフの有向辺にラベル付けして生層序単位を表示する。

3.2 生層序単元のグラフの有向辺の性質

$(\sigma(T), \leq^*)$ のグラフの有向辺は、上向き、右向き、右上向きのいずれかである。上向きの有向辺は新しい種が出現したことを表す。右向きの有向辺は古い種が絶滅したことを表す。右上向きの有向辺は同時刻に新しい種の出現と古い種の絶滅があることを表す。いずれの有向辺も上向き成分、右向き成分の目盛りの数(長さ)は、それぞれ、出現種、絶滅種の数である。



第 2 図 (a) $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ を選択して生層序区分した例。(b) 生層序単元のグラフ。

4. おわりに

時刻を実数として生層序単位を数学表現して座標図上のグラフで表示した。個体の生存期間は半開区間 $[p, q)$ であることから出発すると、タクソンの生存期間、層序断面中の化石帯とその上位の部分と下位の部分、生層序単位はすべて半開区間であった。

座標図に化石種の順序集合の有向グラフを描いて、有向辺に境界である時刻をラベル付けして生層序単位を表示した。有向辺の向きから新しい種の出現、古い種の絶滅が読み取れる。有向辺の上向き成分、右向き成分の目盛りの数から、それぞれ、新しい種の出現数、古い種の絶滅数が読み取れる。

時刻を実数とすると、同時刻に複数の種が出現したり、絶滅したりすることは無いだろうが、そのモデルで生層序単位を座標図上に表示することはできる。特に、同じ時刻に新しい種の出現と古い種の絶滅があった場合の化石種の順序が右上向きの有向辺で表示されることは、種の生存期間を半開区間としたことによる。

実数の時刻は測定されて数値で表示されるので、実際には本研究のような生層序単位は無い。しかしながら、時刻を実数とした数学表現は生層序単位を求めるアルゴリズムに何らかのヒントをあたえるだろう。

文 献

河西秀夫(2012) グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現. 情報地質, vol.23, no.3, pp.109-120.

<https://doi.org/10.6010/geoinformatics.23.109>

山口久美子・塩野清治(2022)種の生存期間と時間的順序のグラフ表現-座標図の提案と活用-. 情報地質, vol.33, no.1, pp.003-012.

https://doi.org/10.6010/geoinformatics.33.1_3.

八尾 昭(2004) 生層序学の基礎. 鎮西清高・植村和彦(編) 古生物の科学 5, 地球環境と生命史, 朝倉書店, pp. 53-59. ISBN-13: 978-4-254166453